

Силаев, перед рассказом парциального разложения: Эту тему студенты не любят, потому что здесь почти все формулы длиннее пяти букв, а студенты на таких уже засыпают. А зря, тема очень полезная. Ну вы постарайтесь...

Вернёмся к асимптотике на бесконечности:

$$\Psi = e^{ikz} + \frac{e^{ikr}}{r} f(\theta, \varphi)$$

Функцию рассеяния $f(\theta, \varphi)$ можно разложить по сферическим функциям $Y_{lm}(\theta, \varphi)$. Мы рассмотрим наиболее распространённый случай сферического потенциала, где зависимости от φ нет. Тогда $f(\theta)$ зависит только от θ и раскладывается по $Y_{l0}(\theta, 0)$, т.е. по полиномам Лежандра $P_l(\cos \theta)$

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l (2l + 1) P_l(\cos \theta)$$

Откуда взялось $2l + 1$? Для дальнейшего удобства: мы сейчас определяем f_l как коэффы разложения амплитуды по полиномам Лежандра, делённые на $2l + 1$. Т.е. мы могли написать

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} g_l P_l(\cos \theta)$$

и определить f_l как $\frac{g_l}{2l+1}$.

На всякий случай заметим, что и амплитуда рассеяния $f(\theta)$, и парциальные моды f_l зависят от волнового числа k налетающей волны (или, что то же самое с точностью до \hbar , её импульса):

$$f(\theta, k) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l(k) (2l + 1) P_l(\cos \theta)$$

Если мы найдём эти $f_l(k)$, это будет праздник – мы найдём амплитуду рассеяния

$f(\theta, k)$, и её диф.сечение рассеяния $\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta, \varphi)|^2$ и всё будет классно. Но как найти $f_l(k)$?

Сделаем небольшое отступление.

Оптическая теорема

У неё несколько формулировок. Например, Парфёнов даёт такую экзотическую, через матричные элементы его любимого оператора рассеяния на энергетической поверхности \hat{T} :

$$\text{Im}(T_{ii}) = -\pi \sum_f \delta(E_f - E_i) |T_{if}|^2$$

Не будем уточнять, что это за оператор \hat{T} – он практического смысла не имеет, однако играет важную роль во всех выводах.

Конечно, чаще встречается нормальная формулировка оптической теоремы через амплитуду рассеяния:

$$\text{Im}(f(k, \theta)) = \frac{k}{4\pi} \sigma$$

Теорема называется оптической, потому что подобное соотношение есть где-то в оптике.

Небольшой смысл имеет оптическая теорема и сама по себе. Вспомним, что полное сечение вычисляется интегралом. Может оказаться, что вместо взятия интеграла для подсчёта полного сечения будет быстрее просто взять мнимую часть амплитуды рассеяния. Но тогда требуется аккуратность. Например, если амплитуда подсчитана в первом борновском приближении, то тогда она действительна, и мнимой части нет вовсе. Что, тогда и сечение нулевое? Совсем нет: сечение второго порядка малости по взаимодействию, а первое борновское приближение первого порядка малости по взаимодействию. Вот второе борновское приближение дало бы амплитуде мнимую часть, которую бы мы и подставили в оптическую теорему... Но легче подсчитать сечение из интеграл, чем считать второе борновское приближение ☺

Представим амплитуду в экспоненциальном виде:

$$f_e = |f_e| e^{i\delta_e}$$

Подставим в оптическую теорему

$$|f_e| = \sin \delta_e$$

Ура! Раньше мы не знали комплексное число – парциальную амплитуду рассеяния f_l , а теперь мы связали его модуль и фазу. Давайте всё выразим через фазу рассеяния (именно так она называется) δ_l :

Подставляем её в амплитуду рассеяния:

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l (2l + 1) P_l(\cos \theta)$$

Получаем

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} |f_l| e^{i\delta_l} (2l + 1) P_l(\cos \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \sin(\delta_l) e^{i\delta_l} (2l + 1) P_l(\cos \theta)$$

Но как найти фазу?

Тут Парфёнов развёл мегавыкладки. Силаев, мне кажется, скрепя сердце, убрал половину из них под ковёр, из-за чего рассуждения стали совсем нестрогими. Сообщаю вам конечный результат – алгоритм решения задач с парциальным разложением.

Сначала надо решить стационарное ур-е Шрёдингера для радиальной части:

$$R_l'' + \frac{2}{r} R_l' + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - V(r) - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m r^2} \right) R_l = 0$$

Как правило, стоит замену $R_l = \frac{u_l}{r}$, то будет

$$u_l'' + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - V(r) - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m r^2} \right) u_l = 0$$

Как мы видим, в общем случае ДУ не решается из-за наличия $V(r)$.

Однако есть асимптотика при $V \rightarrow +\infty$: тогда $u_l'' + \frac{2m}{\hbar^2} E u_l = 0$, и решением будет

косинус с фазой $\lim_{r \rightarrow \infty} u_l = D \cdot \frac{1}{k} \cos \left(kr + \delta_l - \frac{\pi(l+1)}{2} \right)$. δ_l - фаза рассеяния. Она нас и интересует!

Итак, ещё раз:

1) Алгоритм следующий: решить одномерное ур-е Шрёдингера

$$u_l'' + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - V(r) - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m r^2} \right) u_l = 0$$

2) Взять асимптотику на бесконечности,

подогнав к виду $u(r) = const * \cos \left(kr + \delta_l - \frac{\pi(l+1)}{2} \right)$. Оно гарантированно будет подгоняться к вот такому виду. Отсюда выцепить фазу рассеяния δ_l .

3) Зная фазу рассеяния, найти амплитуду рассеяния $f_l = \frac{e^{i\delta_l}}{k} \sin \delta_l$

4) Зная амплитуду рассеяния, найти всё на свете:

дифференциальное сечение: $\frac{\delta\sigma}{d\Omega}(\theta) = |f(\theta)|^2$

и полное сечение: $\sigma = \iint \frac{\delta\sigma}{d\Omega} d\Omega$

и ВФ на бесконечности: $e^{i\vec{k}\vec{x}} + \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{r} f(\theta, \varphi)$

Замечание 1. Силаев пишет

$$u(r) = \text{const} * \cos\left(kr + \delta_l - \frac{\pi(l+1)}{2}\right)$$

Парфёнов пишет

$$R_l(r) = \frac{\text{const}}{r} * \cos\left(kr + \delta_l - \frac{\pi l}{2}\right)$$

Напомню, что $u(r)$ - это по определению $rR_l(r)$ - радиальная составляющая убывает с ростом r (у нас же сферическая волна, и $u(r)$ эту зависимость «исправляет»). А что касается фазы, то $\cos\left(\theta - \frac{\pi(l+1)}{2}\right) = -\cos\left(\theta - \frac{\pi l}{2}\right)$, и то этот минус сжирает константа.

Замечание 2. Отметим плюсы и минусы парциального разложения перед первым борновским приближением:

- +: не нужно условие малости потенциала, в отличие от борновского приближения
- : требуется центральность потенциала, т.е. зависимость только от расстояния r (впрочем, в 98% случаев это так)
- : сложность вычислений: на первом шаге требуется решить ДУ, которое может и не решаться в элементарных функциях.

Рассмотрим пример решения задачи от Парфёнова: $\tilde{V}(r) = V_0 \frac{a^2}{r^2}$ Причём сначала мы по приколу подсчитаем первое борновское, благо что это быстро:

Хоть и $\frac{a^2}{r^2}$ убывает не как $\frac{1}{r^3}$, но нам всё равно предлагает воспользоваться приближением стационарного рассеяния.

Первое боровское: $f = -\frac{2m}{\hbar^2 q} \int_0^{\infty} dr \cdot r \cdot V_0 \cdot \frac{a^2}{r^2} \sin qr = -\frac{2ma^2 V_0}{\hbar^2 q}$.

, $\int_0^{\infty} \frac{dr}{r} \sin qr = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi/2$. Откуда получаем $\frac{\pi m V_0 a^2}{2 \hbar^2 q \sin(\frac{\theta}{2})}$.

Но по виламч по воде писано: $\epsilon_B \rightarrow +\infty$, нет гарантии, что 1 боровское приближение даст верный ответ.

Поэтому перейдём к парциальному методу:

$$R_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \chi_e(kr)$$

Обращаю внимание, что u у Парфёнова отличается от u от Силаева! У Силаева

было $R_l = \frac{u_l}{r}$. Здесь и далее будут обозначения именно Парфёнова!

$$u_e'' + \frac{1}{x} u_e' + \left[1 - \frac{(l+\frac{1}{2})^2}{x^2} - \frac{2m}{\hbar^2} \frac{V_0 a^2}{r^2} \cdot \frac{1}{k^2} \right] u_e = 0$$

$$1 - \frac{(l+\frac{1}{2})^2}{x^2} + \varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2}$$

Обозначим $(l+\frac{1}{2})^2 + \varepsilon = v^2$, $v = \sqrt{(l+\frac{1}{2})^2 + \varepsilon}$.

Тогда $u(x) = A_e J_v(x) + B_e J_{-v}(x)$

Тогда $u_e(x) = A_e J_v(x)$ $\Big|_{x \rightarrow 0} = 0$, т.к. $u(0) < \infty$.

$$\Big|_{x \rightarrow \infty} = A_e \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin(x - \frac{\pi v}{2} + \frac{\pi}{4})$$

(Другой стороны, $u_e(x) = \frac{\text{const}}{\sqrt{x}} \sin(x - \frac{\pi l}{2} + \delta_e)$)

$$\Rightarrow -\frac{\pi v}{2} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi l}{2} + \delta_e \Rightarrow \delta_e = \frac{\pi}{2} \left[(l+\frac{1}{2}) - v \right]$$

$$\delta_e = -\frac{\pi}{2} \left[\sqrt{(l+\frac{1}{2})^2 + \frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2}} - (l+\frac{1}{2}) \right]$$

$$\delta_e = -\frac{\pi}{2} \left[\sqrt{(l+\frac{1}{2})^2 + \frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2}} - (l+\frac{1}{2}) \right]$$

$$f(k, \theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_e} \sin(\delta_e) P_l(\cos \theta)$$

Ответ получен. Рассмотрим забавы ради случай $\theta \rightarrow 0$.

Сначала рассмотрим случай $\theta = 0$:

Рассмотрим частный случай

$$\cos\theta \approx 1, P_\ell(\cos\theta) \approx P_\ell(1) \approx 1 \quad \forall \ell.$$

$$\text{Тогда } f(k, \theta) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) e^{i\delta_\ell} \sin(\delta_\ell)$$

↑ стремится к 1

← стремится

$$k - \frac{\pi}{2} \frac{\ell}{2\ell+1}$$

Тогда ряд стремится к $-\infty$!

Получили, что при $\theta = 0$ амплитуда (и дифференциальное сечение рассеяния) бесконечны. А какая асимптотика при $\theta \rightarrow 0$? Получим асимптотику:

$$\text{При } \theta \rightarrow 0, \theta \neq 0 \quad f(k, \theta) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \left(-\frac{\pi}{2}\right) \frac{\ell}{2\ell+1} P_\ell(\cos\theta) =$$

$$-\frac{\pi}{2k} \sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(\cos\theta)$$

← ищем в справочнике, $= \frac{1}{2\sin(\theta/2)}$

$$\text{Тогда при малых } \theta \quad f \approx -\frac{\pi m V_0 a^2}{\hbar^2 k \cdot 2\sin(\theta/2)} \quad \text{— тот же результат}$$

что и для 1 борновского приближения!

Получили, что борновское приближение, которое мы применили практически наобум, совпало с точным решением, полученным методом частичного анализа, при малых углах!

Рассеяние при низких и высоких энергиях

Точное решение ДУ

$$R_l'' + \frac{2}{r} R_l' + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - V(r) - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m r^2} \right) R_l = 0$$

часто затруднительно.

В случае сильно низких и высоких энергий можно сделать некоторые приближения. Парф тут выводит одну формулу, я приведу её вывод, но если вам лень – можете посмотреть только результат:

Займемся решением 1У

$$R_e''(r) + \frac{2}{r} R_e'(r) + \left[k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{2mV(r)}{\hbar^2} \right] R_e(r) = 0$$

При $r > a$ слагаемым $\frac{2mV(r)}{\hbar^2}$ можно пренебречь — потенциал слишком мал.

Также сделаем замену $R_e(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} u_e(kr)$. x — безразмерная.

$$\text{Тогда } u_e'' + \frac{u_e'}{x} + \left[1 - \frac{(\ell+1/2)^2}{x^2} + \dots \right] u_e = 0$$

← мало!

Это ур-е Бесселя: $u_e(x) = A_e J_{\ell+1/2}(x) + B_e J_{-\ell-1/2}(x)$

$$\text{Воспользуемся } J_\alpha(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$u_e = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ A_e \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\ell\right) + (-1)^\ell B_e \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \right\} \quad \begin{array}{l} \text{применим школьную} \\ \text{формулу доп. аргумента} \end{array}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} (A_e^2 + B_e^2) \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\ell + \delta_e\right), \quad \text{где } \begin{cases} \cos \delta_e = \frac{A_e}{\sqrt{A_e^2 + B_e^2}} \\ \sin \delta_e = \frac{(-1)^\ell B_e}{\sqrt{A_e^2 + B_e^2}} \end{cases}$$

$$\delta_e = (-1)^\ell \arctan \frac{B_e}{A_e}$$

Полезная ф-ла для подсчёта фазы рассеяния! Но как найти фазу рассеяния? Надо использовать ГУ:

$$\begin{cases} u_e(ka) = A_e J_{\ell+1/2}(ka) + B_e J_{-\ell-1/2}(ka) \\ u_e'(ka) = A_e J'_{\ell+1/2}(ka) + B_e J'_{-\ell-1/2}(ka) \end{cases} \quad \text{ГУ}$$

Превосходно: Знаем мы бы решение при $x < a$, мы бы подставили и нашли A_e и B_e . Но мы его не знаем!

Выхода нет: опять нужны приближения.

Приближение 1: воспользуемся асимптотикой Бесселя, но этот раз не при $x \rightarrow +\infty$, а при $x > 0$:

$J_a(x) = \text{const.} \cdot \frac{x^a}{\Gamma(a)}$ Вообще-то у const есть точное значение, ищется в справочнике по специальным функциям, но сейчас она нам не нужна.

Т.к. $x = ka \ll 1 \Rightarrow k \text{ мало} \Rightarrow$ это приближение медленных частиц.

Подобрав в качестве $a = \ell + \frac{1}{2}$ и $a = \ell - \frac{1}{2}$:

$$J_{\ell + \frac{1}{2}}(x) = C \cdot \frac{x^{\ell + 1/2}}{(2\ell + 1)!!} ; \quad J_{\ell - \frac{1}{2}}(x) = \frac{(2\ell - 1)!!}{x^{\ell + 1/2}} \cdot C$$

где $x = ka$:

$$\text{гд } \begin{cases} u_\ell(x) = C \left[A_\ell \cdot \frac{x^{\ell + 1/2}}{(2\ell + 1)!!} + B_\ell \frac{(2\ell - 1)!!}{x^{\ell + 1/2}} \right] \\ \frac{x}{\ell + \frac{1}{2}} u'_\ell(x) = -C \left[A_\ell \cdot \frac{x^{\ell + 1/2}}{(2\ell + 1)!!} - B_\ell \frac{(2\ell - 1)!!}{x^{\ell + 1/2}} \right] \end{cases}$$

Решение этой системы:

$$2C \cdot A_\ell = \frac{(2\ell + 1)!!}{x^{\ell + 1/2}} \left[u_\ell(x) + \frac{x}{\ell + \frac{1}{2}} u'_\ell(x) \right]$$

$$2C \cdot B_\ell = \frac{x^{\ell + 1/2}}{(2\ell - 1)!!} \left[u_\ell(x) - \frac{x}{\ell + \frac{1}{2}} u'_\ell(x) \right]$$

Итак, в итоге получаем, подставив в $\delta_\ell = (-1)^\ell \arctg \frac{B_\ell}{A_\ell}$:

$$A \delta_\ell = (-1)^\ell \arctg \left[\gamma_\ell \cdot \frac{(ka)^{2\ell + 1}}{(2\ell + 1)!! (2\ell - 1)!!} \right]$$

$$\text{где } \gamma_\ell = \frac{(\ell + \frac{1}{2}) u_\ell(ka) - ka u'_\ell(ka)}{(\ell + \frac{1}{2}) u_\ell(ka) + ka u'_\ell(ka)}$$

Итак, мы выразили парциальную фазу рассеяния через значение ВФ и её производной в одной точке – ka . Т.е. нам в приближении медленных частиц достаточно знать не всю функцию u , а её и её производную в одной точке! Это поможет нам в решении одной задачи чуть позднее.

А сперва заметим, что аргумент арктангенса с ростом ℓ катастрофически быстро падает. (Напомню, что $(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n-3) \cdot (2n-1)$). В 95% случаев

основной вклад в конечную амплитуду (и сечение) вносит $l=0$, т.е. s -волна – сферически-симметричная.

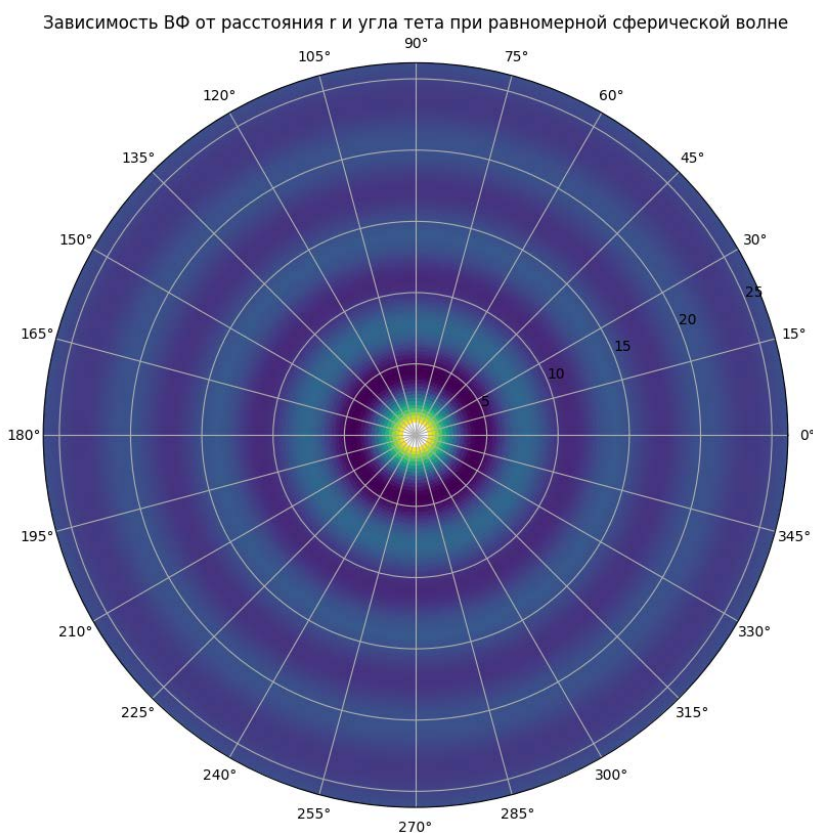
Заметим, что полученный нами результат совершенно физически очевиден!

- 1) При низких энергиях рассеяние изотропно (в нём участвует только s -волна)
- 2) При низких энергиях полное сечение рассеяния не зависит от энергии.



Частицы такие слабые , что потенциал на их фоне . Представьте: вы сильный потенциал, а на вас с какой-то маленькой скоростью движется частица. Вы сначала скорость занулите (пфф, она совсем маленькая была), а затем швырнете её от себя. Представьте, что на вас со скоростью 1 мм/с летят теннисные шары со всех сторон, от которых вы отбиваетесь. Вероятно, 1) они будут разлетаться сферическими волнами во все направлениях одинаково, т.е. изотропно 2) их направление не будет зависеть от начальной скорости, потому что вы пнёте их гораздо сильнее.

Картинка:



Синусоидальная сферическая волна – $\frac{e^{ikr}}{r}$. Как мы видим, чем дальше от центра, чем больше сливаются минимумы и максимумы – всё-таки зависимость пропорциональна $\frac{1}{r}$.

Обратите внимание, что на картинке амплитуда f не зависит от θ (по всем направлениям всё синфазно!) и фаза рассеяния δ_l равна 0. Всё потому что сферическая волна:

```
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
import numpy as np
fig = plt.figure()
ax = Axes3D(fig)
rad = np.linspace(1, 26, 100)
azm = np.linspace(0, 2 * np.pi, 100)
r, th = np.meshgrid(rad, azm)
z = np.sin(r)/r
plt.subplot(projection="polar")
plt.pcolormesh(th, r, z)
plt.plot(azm, r, color='k', ls='none')
plt.grid()
plt.thetagrids([theta * 15 for theta in range(360//15)])
plt.title("Зависимость ВФ от расстояния r и угла тета при равномерной сферической волне")
plt.show()
```

Теоретики говорят, что при малых энергиях основной вклад вносит s-волна – т.е. сферически симметричная. Это позволяет в ряде для амплитуды рассеяния

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \sin^2(\delta_l) e^{i\delta_l} (2l+1) P_l(\cos \theta)$$

считать лишь нулевое слагаемое, соответствующее s-волне.

Тогда

$$\delta_0 = \gamma_0 k a; \quad \sigma = \frac{4\pi}{k^2} (\gamma_0 k a)^2 = 4\gamma_0^2 \pi a^2 = \gamma_0 \cdot 4\pi a^2$$

Однако может сложиться так, что $\gamma_0 = 0$. В этом случае нулевое слагаемое, соответствующее сферической волне, будет 0, и основной вклад будет от p-волны.

$$\sigma_1 = \frac{4\pi}{k^2} 3\gamma_1^2 \frac{(ka)^6}{9} = \pi a^2 \cdot \frac{4(ka)^4}{3} \gamma_1^2 \ll \pi a^2$$

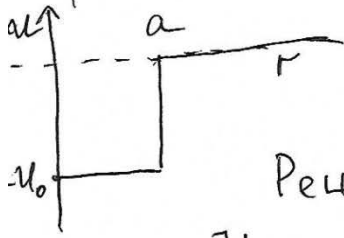
Обратите внимание на знак \ll (он вызван малостью k , т.е. малоэнергичностью налетающих частиц). Стоило s-волне занулиться, так придётся стать главной p-волне, а она слабая-слабая. Сечение в этом случае будет маленьким.

Но возможна и обратная ситуация: для какого-то $l \gamma_l = +\infty!$

Тогда $\delta_l = (-1)^l \frac{\pi}{2}$
 $\sin^2 \delta_l = 1, \quad \sigma_l = \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) = \pi a^2 \cdot \frac{4(2l+1)}{(ka)^2} \gg \pi a^2$

Сечение резко подскакивает и становится много больше размеров мишени!
 Это случай резонанса.

Пример: $U(r) = -U_0 H(a-r)$,



Решение.

Начинаем с s-волны: $\sigma_0 = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2(\delta_0)$

Найти сечение рассеяния
медленных частиц
↓
каскад

Когда нам явно сказали, что частицы медленные, первым делом пишем s-волну – как правило, именно она даёт основной вклад.

$$\frac{d^2 R_0}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR_0}{dr} + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2mU(r)}{\hbar^2} \right] R_0 = 0$$

$$R(r) = \chi(r)/r$$

$$\frac{d^2 \chi}{dr^2} + \left[k^2 - \frac{2mU(r)}{\hbar^2} \right] \chi = 0$$

Рассмотрим 2 области:

$$1) r \gg a \quad \frac{d^2 \chi}{dr^2} + \underbrace{\left[k^2 + \frac{2mU_0}{\hbar^2} \right]}_{K^2} \chi = 0 \quad \left| \quad 2) r \ll a: \quad \frac{d^2 \chi}{dr^2} + k^2 \chi = 0$$

$$\chi(r) = \tilde{A} \sin Kr + \tilde{B} \cos Kr =$$

0, т.к. при $r \rightarrow 0$ $\chi = 0$

$$\chi = A \sin(kr) + B \sin(kr) = C \sin(kr + \delta_0)$$

(иначе $R(r) = \frac{\chi(r)}{r}$ будет $\rightarrow \infty$)

Условия сшивки: $\tilde{A} \sin Ka = C \sin(ka + \delta_0)$ D

$$K \tilde{A} \cos Ka = k C \cos(ka + \delta_0)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{K} \operatorname{tg} Ka = \frac{1}{k} \operatorname{tg}(ka + \delta_0)$$

$$\delta_0 = -ka + \arctan\left(\frac{K}{k} \operatorname{tg}(Ka)\right)$$

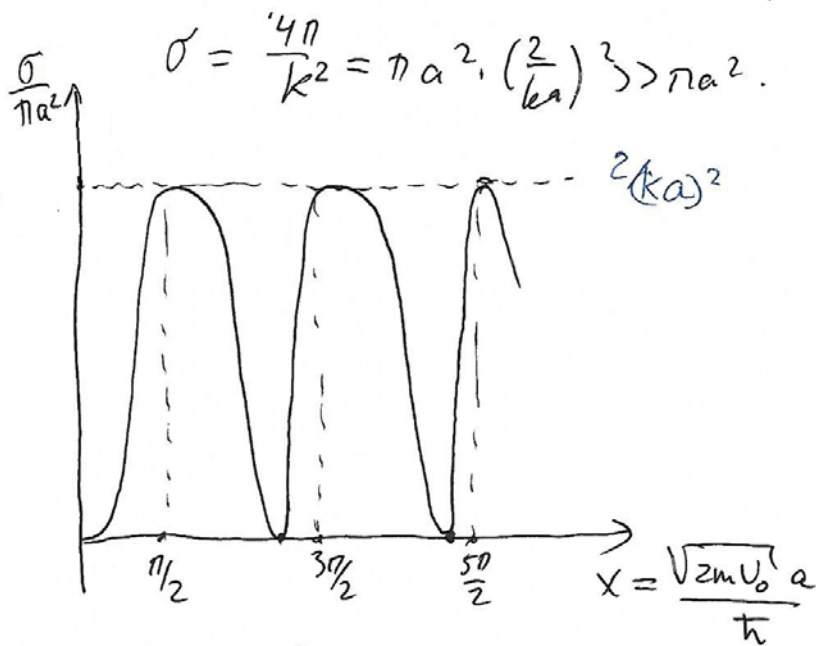
А полное сечение $\sigma_0 = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0$

Обозначив за $x = \frac{\sqrt{2mU_0} a}{\hbar}$, то, используя \tan как 1, можно

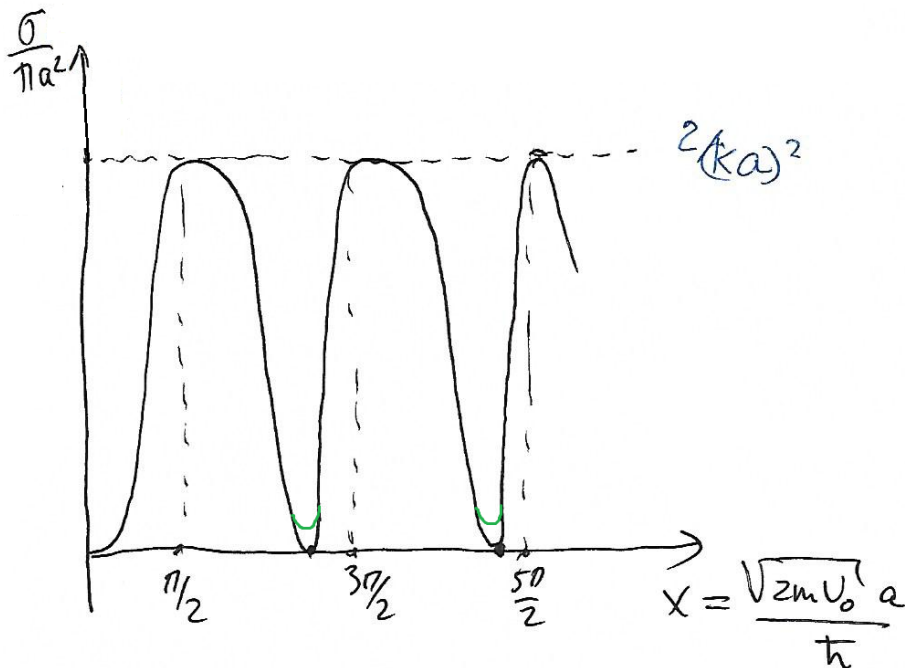
записать $\sigma_0 \approx \pi a^2 \cdot 4 \left[\frac{\operatorname{tg} x}{x} - 1 \right]^2$.

А что, если $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$? Тогда $\operatorname{tg} x = \infty \Rightarrow \sigma = \infty$
Резонанс!

На самом деле $\sigma_0 = k_0 + \omega$, но всё равно большому числу:



Типичный график – явно видны пики, соответствующие резонансу, и... нули. Что, сечение при таких x будет совсем нулевым? Нет, конечно, нас спасёт p -волна, так что будет как-то так:



У p -волны там могут быть тоже свои резонансы. И у d -волны тоже. Но Парфёнов уж поленился их рисовать.

Как он сказал, пики резонансные у p -волны и d -волны, как правило, ещё выше, чем у s -волны, но и уже. Попасты в них очень сложно, это надо ювелирно подбирать начальные параметры. Такие дела ☺

«Как сделать задачу по теории рассеяния, где все будут ошибаться? Взять потенциал, где методом частичного анализа всё аналитически считается, и

подогнать параметры так, чтобы был d -резонанс. Все дружно посчитают σ_0 - сечение на s -волне, убедятся, что оно не 0 и сдадут в качестве ответа. Ну, парочка зануд проверят, что на p -волне резонанса нет. d никто проверять не будет» (С) Парфёнов

Так, это всё был случай низких энергий. А чё там с высокими?

Силаев долгими и скучными выкладками получает формулы:

для амплитуды рассеяния на угол θ :

$$f(\theta) = \int_0^{\infty} 2k\rho k d\rho \cdot J_0(k\rho \sin \theta) \cdot \frac{1}{2ik} (e^{2i\delta(\rho)} - 1) \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

для полного сечения рассеяния:

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{4\pi}{k} \int_0^{\infty} 2k\rho k d\rho \cdot 1 \cdot \frac{1}{2k} [1 - \cos(2\delta(\rho))] \cdot 1$$

Какого-то сильного упрощения мы не получаем (опять нужно считать фазу рассеяния), просто в формулах хотя бы нет суммы по полиномам Лежандра.


Комментарий:

Поскольку энергия частиц большая, а J_0 - осциллирующая функция, то интегрирование $J_0(k\rho \sin \theta)$ по ρ ($0 \leq \rho \leq a$) при больших $k \sin \theta$ занулит соответствующий интеграл, следовательно при высоких энергиях рассеяние происходит на небольшие углы, то есть $\theta \lesssim \frac{1}{ka}$.



Действительно, у нас же высокие энергии! Значит, частица  , а



потенциал на её фоне  . Естественно, частица скорее будет отклоняться на малые углы, что мы и получили.